1

$x_n = \pi/2 - 1/x_n + O(1/x_n)$

1 Asymptotique

1.1

Développement asymptotique à trois termes de a) $(1+x)^{1/x^2}$, $\ln(\ln(1+x))$, $(x+1)^{1/(x+1)} - x^{1/x}$
b) $(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^x$,

1.2

(16-17) Soit P dans $\mathbf{R}[X]$ tel que $P(1) > 1$. On pose $P_n(X) = X^n - P(X)$.
a) Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n possède exactement une racine dans $]1, +\infty[$ que l'on note x_n.
b) Montrer que x_n converge vers une limite l à préciser.

1.3

$x_n - n\pi = \arctan(x_n)$

$x_n - n\pi = \pi/2 - \arctan 1/x_n$

$= \pi/2 - \frac{1}{n\pi} + o(\frac{1}{n})$

$+ \frac{1}{3 x_n^3} + o(\frac{1}{x_n^3})$

DA à quatre termes des solutions de $\tan x = x \mid x \in]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ au voisinage de l'infini.

1.4 Puissance n-ième.

Soit a_n une suite réelle de termes > -1.
a) Montrer que $a_n - \ln(1+a_n)$ tend vers 0 ssi a_n tend vers 0.
b) Montrer que $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 ssi e^{a_n} est équivalente à $(1+\frac{a_n}{n})^n$. (Comportement de a_n/n d'abord).

2 Intégrales simples

2.1 Rappel

Montrer qu'il existe des constantes A et B positives telles que, pour toute fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1 et 2π périodique on ait

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} | f(t) | \leq A \int_0^{2\pi} | f'(t) | \, dt + B\left(\int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, dt\right)^{1/2}$$

2.2

Etudier $x \longmapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$ en 0 et $+\infty$.

$\frac{1-\varepsilon}{t} < \frac{\cos t}{t} < \frac{1+\varepsilon}{t}$, en $+\infty$ IPP

2.3

Soit $f \in C([0,1],\mathbf{R})$.
a) Montrer $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$
b) Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}$.

3 Intégrales généralisées

3.1

IPP IPP

Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty}(Arctg(1+t)-Arctg(t))dt$, $\int_0^{+\infty}\log(1+\frac{1}{y^2})dt$, $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}dt$.

IPP HOURA !

3.2

étudier $\sum_{n=1}^{N} k^n n e^{-nh}$

Soit $r>0$. Donner un équivalent, lorsque $h>0$ tend vers 0, de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^r e^{-nh}$.

$f(x) = xe^{-x}$

3.3

On considère $f : x \to \int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.
a) Donner le domaine de définition de f ; est-elle prolongeable par continuité ? En donner un équivalent en $+\infty$.
b) En déduire $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$.

3.4

Soit $f : \mathbf{R}^+ \mapsto]0,+\infty[$ une application de classe C^1. On suppose que, en $+\infty$, $\frac{f'}{f}\sim\frac{2}{x}$. Montrer que $\int_0^x f(t)dt \sim \frac{xf(x)}{3}$ en $+\infty$.